2022 KIAS-SNU winter camp – Team project

Qubit control – computational experiment with Qutip

예시 답안 (코딩 포함) 은 캠프 발표 후 제공합니다.

Qutip을 이용하여 다음의 문제들을 풀고 결과를 발표하세요.

1. **Schmidt decomposition.** Qutip 또는 Python numpy package를 이용하여 다음의 bipartite 양자상태를 Schmidt decomposition 하고 entangle 되어 있는지 여부를 논하시오. 발표시 Schmidt decomposition의 의미와 증명도 언급하시오.

   A. $\frac{|00\rangle+|01\rangle+|11\rangle}{\sqrt{3}}$ (notation: $|\#_A\#_B\rangle$. A and B systems are both 2 dimensional)

   B. $\frac{2|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-2|11\rangle}{\sqrt{10}}$ (A and B systems are both 2 dimensional)

   C. $\frac{2|00\rangle+|01\rangle-|02\rangle-2|10\rangle+|11\rangle+|20\rangle+|22\rangle}{\sqrt{13}}$ (A and B systems are both 3 dimensional)

2. **Hadamard gate on Bloch sphere** – 제공된 **qubit-dynamics-RWA-2dsim** 화일을 적당히 수정하고 가해주는 frequency 와 Rabi amplitude, time 을 적당히 조절하여 Hadamard gate (x 축과 z 축의 45 각도를 이루는 축으로 Bloch vector 를 180 도 돌리는 single qubit gate) 를 만들어 보고 $|0\rangle$, $|1\rangle$ 상태 입력에 대한 출력을 Bloch sphere 에 그리시오.

3. **Two qubit time evolution simulation**

   A. Write down the Lab frame Hamiltonian of two qubit interacting in Ising-type interaction with external driving to both qubits.

   B. Using the formula, $H_{rot}=U_{trans}H_{lab}U_{trans}{}^{\dagger}-iU_{trans}\frac{dU_{trans}{}^{\dagger}}{dt}$ connecting rotating and lab frame Hamiltonian with $U_{trans}=e^{-iw_{MW1}t(\sigma_{z1}\otimes I)}e^{-iw_{MW2}t(I\otimes\sigma_{z2})}$, convert your lab frame Hamiltonian to RWA (rotating wave approximation) Hamiltonian.

   C. B 에서 구한 Hamiltonian 을 사용한 master equation 을 풀어서 (Qutip mesolve 함수 이용) 결과를 발표하시오.

4. **Bell state fidelity –** 두 density matrix 가 얼마나 닮았는지를 측정하는 fidelity 는 어떻게 정의할 수 있는가? (유일하지 않을 수 있으나, 인터넷 검색으로 찾아보세요). 위에서 수행한 two qubit RWA approximation simulation을 사용해서 다음과 같은 계산실험을 해보자. 1번 qubit을 target qubit, 2번 qubit을 control qubit이라고 하자. 1번 qubit의 driving 크기를 qubit 사이의 상호작용크기보다 적절히 작게 설정하고 driving frequency, driving duration을 잘 조절해서 CNOT gate (conditional not gate : control qubit 상태가 0이면 target qubit 에 identity operation, control qubit 상태가 1이면 target qubit 의 상태를 flip 하는 two-qubit 게이트) 가 되도록 설정해 보자.

   A. 초기상태 $|00\rangle$, $|01\rangle$ 은 Ideal 한 CNOT 에 의해 어떤 상태로 변환되어야 하는가?

   B. 여기서 만든 CNOT은 초기상태 $|00\rangle$, $|01\rangle$ 을 어떤 density matrix 로 변환하는가? Ideal output state 와 비교했을때, output 으로 나온 density matrix 의 fidelity 는 얼마인가?

   C. 이제 초기상태를 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$ 로 하고 simulation으로 만든 CNOT 게이트를 통해 time evolve 시켜보자. Ideal 하게는 무었이 나와야 하는가? 실제의 output 은 얼마의 fidelity를 가지고 있는가? 이 fidelity를 최대로 하도록 qubit driving, frequency, amplitude, duration 등을 조절해 보시오 (global maximum 은 아니더라도 변수들의 적당한 범위에서 maximum).

   D. 초기상태 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$ 에 CNOT 을 두번 해보자. Ideal 하게 무었이 나와야하는가? 실제로는?

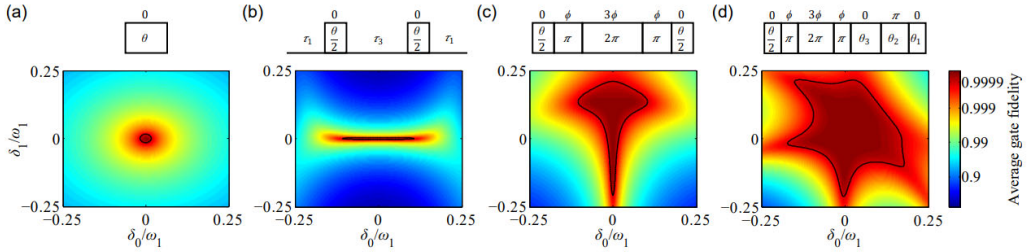
   E. 인터넷을 검색하여 two-qubit 의 경우 concurrence 라는 양이 어떤 의미를 가지고 있으며 entanglement 와 무슨 관계가 있는지 조사해서 발표하시오. 위의 CNOT 을 이용해 Bell state 를 생성한 경우 output density matrix의 concurrence를 어떻게 계산할 수 있는가?

5. **Composite pulses for single qubit gate on NV centers** – 참고논문은 *Nature Communications* **volume 6**, 8748 (2015) 입니다.

   A. 위의 논문의 supplementary material – supplementary note I 을 참고하여 NV electron spin - N nuclear 의 two spin system 의 경우 Hamiltonian을 RWA 을 이용한 결과를 쓰시오. 자세한 과정이 모두 supplementary note I 에 있습니다.

   B. 이 스핀 시스템의 전자 스핀에 Single qubit gate 를 process fidelity (뜻을 인터넷에서 찾아보세요) 를 최대가 되게 가하려고 한다. 논문처럼 x 축으로 90도 돌리는 single qubit gate 를 생각해보자. 가장 간단하게는 Driving 주파수와 duration을 잘 calibration 한 보통의 펄

스, 즉 envelope 이 square 인 펄스 (phase 0인 control field 가 어느 시점에서 켜졌다가 일정 amplitude 를 gate time 동안 유지한 후 꺼지는 펄스)를 생각할 수 있다. 이러한 펄스를 아래그림의 (a) 에 나타내었다. -논문에서 발췌- 펄스그림 아래의 2차원 그림은 control field 의 calibration 에러 (델타1, 델타2, 논문 참조) 가 양, 음으로 어느정도 있을 때 single qubit process fidelity 가 어떻게 변화하는지 보여준다. 그림에서 나타나듯이 에러가 없을 때 (2차원그림의 중앙) 만 fidelity 가 99.9% 이상이고 에러가 있으면 그 영향을 직접적으로 받는 것을 볼 수 있다.



Supplementary Figure 1: **Pulse sequences and contour plot of average gate fidelity of single-qubit gate.** The upper panels show the pulse sequences of $(\theta)_0$ with (a) rectangular naive, (b) five-piece SUPCODE, (c) BB1, and (d) BB1inC pulses, where the phase and duration of each piece of pulse is depicted. The lower panels show the average gate fidelity of $(\pi/2)_0$ with the errors δ_0 and δ_1 when (a) rectangular naive, (b) five-piece SUPCODE, (c) BB1, and (d) BB1inC pulses are applied. The regions of fidelity larger than 0.9999 are surrounded with black curves for clarity.

그에 비해 (b), (c), (d) 의 펄스들은 좀더 복잡한 방법으로 같은 gate 를 구현한것이다. Gate 를 구현하는 시간은 (a) 에 비해 길어지지만 에러에 대한 robustness 가 커지는 것을 알 수 있다. 즉 control field에 error 가 있어도 fidelity를 유지하는 것을 알 수 있다. 이러한 펄스를 composite pulse 라고 하며 역사적으로는 NMR 자기공명실험에서 개발되어 현재 양자컴퓨팅 분야에서도 활발히 사용되고 있다. 논문의 Supplementary Figure 1의 2차원 그림들을 각각의 composite pulse 에 대하여 qutip simulation 을 이용하여 재현하고 결과를 발표하시오.

6. **Bit flip error correction simulation** *Nature* 506 204 (2014) 논문의 다음 그림을 생각해보자. 그림 **a** 패널의 아래 회로는 GHZ state (3개 qubit의 maximally entangled state 중 하나)로 상태를 encoding 한 논리 큐비트에 error process 가 있을 때 decode 와 restore의 과정으로 error를 보정하는 회로이고, 그림 **a**의 위쪽 회로는 이를 실제로 실험에서 구현한 것을 나타낸다. ^{14}N, $^{13}C_1$, $^{13}C_2$ 의 순서로 qubit 3,2,1 번이라 하자. Error process는 qubit 3번이 Bloch sphere에서 x 축을 중심으로 alpha 만큼 회전하는 것으로 주어진다고 가정하라. 즉, alpha =0 인경우를 error probability = 0, alpha = 180^0의 경우를 error probability = 1 이라 하자.

Coupled 3 qubit Hamiltonian을 이용하여 (앞의 two-qubit 문제처럼 Ising type interaction 이 qubit1,2 사이와 2,3 사이에 있다. qubit간 interaction 은 임의로) 아래 그림 **b** 의 결과를 재현하고 결과를 발표하시오. error correction 이 있을 때와 없을 때의 process fidelity (뜻을 인터넷에서 찾아보세요)를 비교하시오.

